范畴论数学基础的理论根基*

孔祥雯　郭贵春

［摘　要］ 探究范畴论数学基础的理论根基，首先要领会数学结构的解释说明，从而认识数学的结构本质；其次要解析范畴论对数学结构的阐释，借由范畴的形式化表征，理解范畴的结构特性，表明范畴论是描述数学结构的理论；最后通过内核与框架阐析范畴论数学基础的本质特征。

［关键词］ 范畴论　数学基础　结构
［中图分类号］ O154.1

科学家通过创建模型及理论了解整个世界，支持结构主义思想的数学哲学家则意在通过结构理解数学整体。概括地讲，基于范畴论的数学基础进路始于数学结构主义的研究思想，其将结构视作数学主体的这一主张，为范畴论跻身数学基础研究平台提供了可能性。鉴于此，本文试图阐明范畴论作为数学基础的解释路径，并对范畴论数学基础的理论根基加以剖析。

一　数学的结构本质

对数学本质的讨论一直是数学哲学探究的根本性问题，并且在一定程度上影响了数学哲学的研究模式，甚至决定了对于数学基础的研究思路。本文将依据数学哲学家对数学结构的解释，剖析数学结构的性质，进而阐明数学的结构特性，最终完成对数学本质的结构说明。

1. 数学结构的解释说明

数学结构主义者主张，数学是结构的科学。① 在他们看来，数学从本质上讲涉及的是结构。为了更好地理解这一点，下文将通过概念解释、实例说明以及对结构特性的描述，来对数学结构加以刻画。

（1） 概念解释

布尔巴基学派在其著作《集合理论》（*Theory of Sets*） 中定义了一类结构 Σ:

a： n 个集合，记为 x_1，x_2，……，x_n，它们是主要的基本集合；

* 本文系国家社会科学基金重大项目“爱思唯尔《科学哲学手册》翻译与研究”（18ZDA030） 的阶段性成果。

① Cf. Ralf Krömer，*Tool and Object*: *A History and Philosophy of Category Theory*，Birkhäuser，2007，p. 208.

b：m 个集合，记为 A_1，A_2，……，A_m；它们称作辅助的基本集合；

c：一个特定的梯形建构方案：记为 S（x_1，x_2，x_3……，x_n，A_1，A_2……，A_m）。①

从对结构 Σ 的刻画中可以直观地看出，布尔巴基学派将结构定义为集合及集合之间的关系。奥尔（O. Ore）通过一个已知系统中的元素以及元素之间的序关系定义结构，这种定义与布尔巴基学派对代数结构的定义非常相似。不同的是，在奥尔的定义中结构的构成对象是元素，不涉及集合。此外，奥尔对代数结构的定义揭示了一个明显的事实，即不需要将数学结构的概念限制在集合论的解释中，数学家应该在更一般的意义上定义数学结构。查尔斯·帕森斯（C. Parsons）同意这种认识，他认为数学结构通常意指一个对象域及这个域上的某些函数与关系，并且这些关系满足某些已知条件。② 显见，帕森斯对结构中对象域的描述更加一般化。

综上可以确定，数学结构强调了数学对象之间的关系，"结构"实际上就是关系的汇总。结构呈现了关系的分布，对象的关系确定了，其形成的结构自然就确定了。再结合《牛津英语词典》对"结构"的定义，即结构是复杂事物各部分或各要素之间的关系排列，我们可以将数学结构理解为"数学对象及对象之间关系的总体"，并且这些对象的构成无关紧要，只需对象之间的关系满足一定的条件即可。③

（2）实例说明

根据上述对数学结构概念的理解，可知数学中的群、拓扑空间、偏序集等均是特定的数学结构。我们将以群结构为例，阐明这些实践中的数学结构。群结构的概念是由公理约定的，即 A：对任意一对元素 g、h，元素 gh 称为 g 与 h 的积，并且该元素是唯一的。B：对任意的元素 g、h、k，其形成的积满足结合律 $g(hk) = (gh)k$。C：对任意的 g，都存在元素 e 使得 $eg = ge = g$，这里的 e 被称为恒等元素。D：对任意的 g，存在元素 g^{-1} 使得 $gg^{-1} = g^{-1}g = e$，称 g^{-1} 为 g 的逆。通过群结构的定义，这里列举两种数学中常见的群结构：一是加法运算下的实数，将实数看作元素，加法运算看作元素的积，毫无疑问，加法满足结合律，其中将 0 记为恒等元素，逆是任意元素对应的负数，显然，实数通过加法运算形成了群结构 $\langle R, +\rangle$。二是乘法运算下不包含 0 的实数，其中非零实数作为元素，积是元素乘法运算的结果，恒等元素是 1，逆是任意元素对应的倒数，如此也形成了一个群结构 $\langle R^{-}, \times\rangle$。对数学实践中的数学结构加以阐述将便于我们更加清晰地领会数学结构的构成，从而进一步理解结构在数学中的核心地位。

（3）性质描述

对数学结构性质的描述将有助于我们更深入地了解数学结构。概括地讲，数学结构本身具有整体性、可转换性、自身调整性及恒定性。①就数学结构中的对象而言，其具有的性质就是与该结构中其他对象之间的关系，对象不具有内在性质，对象的所有性质都依赖结构。在这个意义上，我们认为数学结构具有整体性，必须从整体上加以理解。此外，数学结构的整体性还体现在对数学内容的统一上，在经典数学的划分中，数学分支研究的是某一特定领域，若将这些分支理解为一种或多种不同结构的组合，则可使数学内容统一在结构的框架内，如此便于通过结构展现这些数学分支之间的联系。②在几何学中，平面几何、立体几何、黎曼几何等几何分支描述的模型看起来都是静态

① Cf. Leo Corry, "Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure", *Synthese*, 1992, 92 (3), p. 323.

② Cf. Charles Parsons, "The Structuralist View of Mathematical Objects", *Synthese*, 1990, 84 (3), p. 305.

③ Cf. J. Gómez-Ramirez, *A New Foundation for Representation in Cognitive and Brain Science: Category Theory and the Hippocampus*, Springer, 2014, p. 85.

的、纯图形化的、分散的，在引进群结构之后，这些不同的几何分支形成了一个巨大的构造，伴随着一些转换作用，又因子群之间的嵌套接合关系，使一个子结构向另一个子结构的过渡成为了可能。① 因而，结构本身还具有可转换性。③结构的自身调整性主要是指结构中关系的变化，结构包含对象及对象之间的关系，并且这些关系满足一定条件，如果限制这些关系的条件发生变化，则会产生新的结构。如果结构不能调整，始终保持自身不变，自然不能灵活地解释数学。可知，自身调整性对结构而言是非常重要的。④在不同数学分支及理论中，初看起来完全不同的数学概念也可能是同一类数学结构，这些结构之间是同构的关系，同构的结构共享所有的结构性质，彼此之间在结构上是没有办法区分的，因而那些在同构概念下保持不变的性质实际上就是结构的性质。

2. 数学本质的结构解析

较之于数学哲学中传统的研究方法，结构主义最显著的特点是数学哲学家对数学的认识发生了变化，从认识对象转向了认识对象之间的关系，以及这些关系连同对象自身形成的一个个数学结构。

在现代数学中，群、环、域等都是经典的数学结构，而且是数学中基本的研究对象。② 应该说，“数学的本质是结构”这一观点体现在各个数学分支中。在引入结构思想之前，代数学研究的是多项式方程及其解。由于多项式、线性代数中的矩阵等都具有不同的结构，所以在引进结构的处理方式之后，代数学改变了对概念的定义以及解决问题的方法; 拓扑学起源于著名的“哥尼斯堡七孔桥”问题，因为每一个拓扑空间都有自己的结构，所以对该问题的研究处理使用了结构主义的思想; 群论中的研究对象是群结构; 欧氏几何研究的是欧氏空间结构; 等等。这些数学分支的研究内容进一步佐证了数学研究的是结构。因此说，数学的研究对象以结构为主体，并且可依据结构重新梳理所有数学内容。

再考虑数学中的对象。数学对象的存在依据它们所在的结构，并且这些数学对象不具有任何内在性质，或者说它们所具有的性质就是与其他对象之间的相互关系。显然，谈论数学对象本身并没有什么意义，只有在确定的结构中谈论数学对象才有意义。简言之，数学对象自身的性质特点可被总结为: 一是依据结构，必须在某一确定的结构中谈及对象; 二是不存在与结构无关的内在性质。以结构的方式研究数学，是数学结构主义思想在数学哲学中的具体应用，同时为数学基础研究开启了一种方法论上的解决思路。可以说，结构主义为数学应用提供了最好的可接受的解释。③ 更重要的是，采用结构统一数学内容，一是便于阐明一些已知的数学知识之间的联系，以及一些看起来比较复杂的数学结构之间的相互联系，如向量空间中的向量积、张量积实际上可以表示为同构的结构; 二是可为一些已知的数学定理提供新的论证方式; 三是不同数学分支甚至不同学科可通过类比已知同构结构具有的性质来阐明自身性质; 四是通过结构之间的相互联系，依据已知结构推导当前数学研究中的一些新理论，如此引领数学不断前进。

随着越来越多的数学哲学家聚焦数学结构主义，再考虑到数学结构以及结构的同一性在各个数学分支中的频繁出现，我们不难理解，数学结构主义思想在当今数学实践中已具有广泛的适用性。据此，我们有理由认为数学的结构本质经得起实践的检验。

二　范畴论对数学结构的阐释

布尔巴基学派提出，我们应该围绕结构而不是经典问题发展数学，据此数学哲学家需要开展的

① 参见皮亚杰《结构主义》，倪连生、王琳译，商务印书馆，2011，第 17 页。

② 参见胡作玄《数学研究对象的演化》，《自然辩证法研究》1992 年第 1 期，第 25 页。

③ Cf. J. J. da Silva, “Structuralism and the Applicability of Mathematics”, *Axiomathes*, 2010, 20 (2 - 3), p. 229.

工作是对数学结构的阐释。随着范畴概念的出现及范畴论的发展，一些数学哲学家敏锐地认识到范畴论与数学结构之间的契合，促使范畴论加入了阐释数学结构的行列，产生了范畴结构主义的研究思路。实际上，范畴论的研究内容就是抽象地考虑各种数学科目，因此，从形式的数学角度来看，范畴论为阐明数学结构的非形式概念提供了工具及方便的角度。① 利奥·科里（L. Corry）指出，20 世纪以来，数学已经被视为一门结构科学，而范畴论足以被描述为一种数学理论，该理论可以对这些不同的结构以及在这些结构中反复出现的数学现象进行系统分析。②下面我们将从范畴本身的结构特性出发，论证范畴论是一种结构理论，可用于阐释数学结构。

1. 范畴的结构特性

为了说明任意范畴都表述了某种数学结构，我们将分别从形式与内容上对范畴本身的结构特性展开分析。

（1）从形式上看。根据范畴的定义，我们将通过图表进行描述，将其分别记为 1，2，3。

图 2. 1　数与箭头形成的范畴

图 2. 2　点与箭头形成的范畴

图 2. 1 展示了三个范畴，从形式上看，范畴 1 只包含一个对象 0，态射是该对象的自身恒等态射；范畴 2 包含两个对象 0 与 1，态射除了 a：$0\to1$，还包含两个对象各自的自身恒等态射；范畴 3 包含三个对象 0、1、2，除了自身恒等态射，还包含态射 a、b、c。图 2. 1 所例示范畴的对象 0、1、2 都是自然数，继续使用相同的表述，这些范畴可展示自然数结构。图 2. 2 中直接使用点与箭头表示范畴，从形式上看，图 2. 1 与图 2. 2 中范畴的箭头关系一致。根据数学结构的概念可知，这些对象与箭头关系形成了数学结构，因此图 2. 1 与图 2. 2 中的范畴都是数学结构。再回顾范畴的概念，范畴中的对象可以是满足态射关系的任意事物，图 2. 1 与图 2. 2 中对应的范畴只是对象不同，对象之间的箭头关系是相同的，这些对象的性质都是与该范畴中其他对象之间的关系。在一个确定的范畴中，一个已知对象仅可能具有的性质是“结构的”，③ 因此就这些对应的范畴而言，其中对象的

①② Cf. Leo Corry, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Springer Basel AG, 2004, p. 339, Preface.

③ Cf. I. Bondecka-Krzykowska, R. Murawski, "Structuralism and Category Theory in the Contemporary Philosophy of Mathematics", *Logique & Analyse*, 2008, 51 (204), p. 368.

性质都是结构的，并且这些结构性质是相同的。再通过直观观察可知，图 2.1 与图 2.2 表示的范畴之间必然存在某种关联，即这些对应的范畴是同构的关系，共享同样的结构。这些同构的范畴，其中的对象不同，但是对象满足相同的箭头关系，因此可以说，范畴是由箭头关系组成的结构。①

（2）从内容上看。从“范畴”的定义可知，满足公理条件的就是“范畴”。“范畴”不深究对象是什么，只要对象满足态射关系就可以。确切地讲，任意范畴都是由对象与态射形成的，态射是对象之间的关系。再回顾数学结构的概念，数学结构是由对象及对象之间的关系构成的。通过对概念的理解可以得出，“范畴”表述的都是数学结构，不同的范畴表示不同的数学结构。而且范畴论中的同构概念定义了具有相同结构的范畴，那些在同构概念下不变的性质就是结构性质。显然，范畴的结构性质都是通过态射表述的，因为范畴中的对象除了与同范畴中其他对象之间的关系外不具有任何其他性质，而对象与其他对象之间的关系就是态射。同时，范畴中对象的所有性质都是结构的性质。

以上我们从形式与内容上理解到范畴表述了某种数学结构，而且范畴中的对象只有结构的性质。具体而言，范畴论描述数学结构的有效性源于范畴中的态射是对象之间保存结构（structure-preserving）的映射，由此使得范畴论描述的数学性质都是结构的性质。应该说，范畴论的对象及箭头语言所定义的性质都是结构的性质。

2. 数学结构的理论

对于数学结构的阐释，范畴提供了刻画及描述数学结构的工具，即通过对象与对象之间的态射关系对其进行表述。例如对自然数结构的刻画，就是对自然数之间关系的表述，范畴论者并不在意自然数个体的内在性质。从戴德金、诺特（E. Noether）到麦克莱恩与艾伦伯格，事实清晰地表明数学结构由对象及其之间态射形成的系统所决定，而非由同构下的数学对象的具体特性决定。② 范畴论可通过对象及箭头的语言对结构作统一的阐释，同时还能阐明数学概念与理论的结构性质，可以说，范畴表述的正是数学结构。拉夫尔对此表示，“通过范畴，我们可以理解任何结构”③。阿沃第对此的理解是，“就讨论中的具有结构的数学对象间的保存映射而言，范畴提供了一种表征与描述一个给定类数学结构的方式。范畴可以被看作包含具有某种结构的对象以及保有结构的这些对象间的映射”④。换言之，只要能满足范畴的定义，则必定表述了某种数学结构。图 2.1 与图 2.2 中对应的范畴是同构关系，尽管对象不同，但它们共享同一数学结构。可以说，范畴中的对象仅仅是箭头末端的点，不涉及自身的内在性质，范畴论只关注对象之间的关系，因此使用范畴论阐释数学结构非常恰当。

范畴论最初的直接应用目的之一是将“态射”作为数学域的中心特性，通过范畴统一理解数学内容。随着数学结构主义思想的普及，“态射”被用以理解数学的结构本质。数学结构由对象与对象之间的关系决定，而范畴论是对象与态射的理论，据此，范畴论与数学结构产生了关联，而且范畴论的对象与态射语言在表达结构时非常契合，譬如一个拓扑结构，只需要考虑空间之间的连续映射，不需要考虑空间中涉及的无结构内容。范畴论被用于对数学结构的阐述是在数学实践中摸索

① Cf. John Burgess, *Rigor and Structure*, Oxford University Press, 2015, p. 165.

② Cf. Steve Awodey, "Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective", *Philosophia Mathematica*, 1996, 4 (3), p. 209.

③ F. William Lawvere, "The Category of Categories as a Foundation of Mathematics", *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*, Samuel Eilenberg et al. (eds.), Springer Verlag, 1966, p. 4.

④ Steve Awodey, "Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective", p. 212.

得出的。事实上，范畴论是高度抽象的数学结构理论。它不仅能够描述数学结构，还能够阐明结构之间如何关联。范畴论中的函子概念表述了范畴与范畴之间的关系，即函子是范畴之间的态射，保有范畴之间的结构。事实上，函子既保存对象之间的结构关系，又保存态射之间的结构关系，甚至保存态射之间的运算关系如恒等关系与结合律。在函子概念之外，范畴论中的同构概念也表述了一类数学结构之间的关系。“同构”是范畴论中的重要概念之一，在范畴论形式化的表示同构概念之前，代数中具有相同群结构的两个群被称作是同构的；具有相同的拓扑结构的两个空间则被称为是同胚的。可见，它们都是通过自身理论解释关于自身结构的同构现象。范畴论通过态射间的复合运算统一表示同构概念，使所有同构关系都采用相同的表述标准。令 G、H 是范畴 C 中的两个对象，f: $G \to H$，如果存在态射 g: $H \to G$ 使得 $gf = 1_H$ 且 $fg = 1_G$，那么态射 f 就是一个同构，G 与 H 是同构的对象。① 令 F: $C \to D$ 是一个函子，如果存在函子 E: $D \to C$ 使得 $EF = 1_D$，$FE = 1_C$，那么 F 就是范畴 C 到范畴 D 的一个同构，范畴 C 与范畴 D 就是同构的。②可见，同构概念是对态射及函子的进一步描述。通过对上述概念的分析可知，态射、函子、同构这些概念都是保存结构的映射关系。在范畴论中还包含伴随函子、自然转换等概念，这些概念都涉及对数学结构的阐释。总之，范畴论不仅可以刻画数学结构，还能够阐释数学结构之间的关系。从更加专业的角度看，范畴被认为是“抽象结构”的具体化，这些结构通过其构成对象得到例示，甚至就是字面意义上的“抽象结构”(例如群范畴就是群结构)，所以范畴论自身被视作一种关于数学结构的理论。③ 科里在《近世代数与数学结构的兴起》一文中探讨了几种阐释数学结构的思路，包括奥尔的格论与布尔巴基学派的集合论。通过对比分析，科里指出，“范畴论是最详尽的与成功的公理化理论的实例，可用于系统地刻画及分析不同的结构”④。另外一些学者认为，研究结构的自然数学环境是范畴，而范畴论是获得数学结构特性的极好的理论。⑤ 透过以上声明，我们更加确信范畴论是一种好的结构理论。

三　范畴论数学基础的本质特征

数学结构主义改变了我们认识数学及探究数学本质的方式，为范畴论与数学基础之间搭建了理论桥梁。根据数学结构主义，数学关注的是结构以及对象的结构性质，而范畴论自身已经被描述为数学的结构理论。⑥这样的认识与理解相结合便形成了范畴论数学基础的解释路径。具体而言，范畴论数学基础的本质特征体现在两个方面：一是范畴论诠释了数学内核；二是范畴论构建了数学框架。

1. 诠释数学内核

数学结构是数学的研究主体。范畴论作为一种数学语言，为数学提供了统一的概念基础，能够有效地诠释数学的内核——结构。

范畴论中的概念、定义等都可以通过形式化的方式表示，而且这种形式化蕴含一定的数学内容，因而范畴论既从形式又从内容上阐述了数学结构，可以说，范畴论是处理数学结构的有效语言。兰德瑞(E. Landry)引用了梅伯里(J. Mayberry)对数学与逻辑之间关系的区分。弗雷格、罗素、怀特海(A. N. Whitehead)等是逻辑主义的实践者，他们认为数学是逻辑的分支；布尔

①② 参见贺伟《范畴论》，科学出版社，2006，第 3 页；第 6 页。

③ Cf. John L. Bell, “Category Theory and the Foundations of Mathematics”, *The British Journal for the Philosophy* of Science, 1981, 32 (4), p. 352.

④ Leo Corry, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, p. 12.

⑤⑥ Cf. Joost Vecht, “Categorical Structuralism and the Foundations of Mathematics”, Universiteit van Amsterdam, 2015, p. 44, p. 34.

（G. Boole）、皮尔斯（C. S. Peirce）等则秉持相反的观点，认为逻辑是数学的分支。① 在梅伯里看来，弗雷格的逻辑思想要求数学家谈论对象而不是结构，因而数学哲学家不能获得多样解释的概念；而这些概念可用来表明结构中作为位置的对象，因为它的量词被解释为遍及一个固定的域；因此，在弗雷格的传统中，关于多样解释的问题不会出现。② 梅伯里通过固定的域来解释数学中的对象，他认为，固定的域通过集合论语言保证。在梅伯里看来，范畴论没有描述固定的域，因而不能说明数学结构中作为位置的对象，因此范畴论不是数学语言。事实上，范畴论中的对象与箭头完全可以表示任何有关数学概念与理论的结构，③而且结构中的对象可以依据结构来理解。在布尔的逻辑思想体系中，数理逻辑处理的是整个形式语言，每一种语言都对应着无穷多不同的解释。这些语言中，量词的域不是提前固定好的，语言仅仅是句法组合，并且等待着一个合适的结构来给予它公式的意义。④从表面上看，范畴论在这样的理解下似乎可以作为数学语言，但梅伯里坚持只有集合论语言才能给出这样的语义学解释。而就其中涉及的语义学而言，兰贝克（J. Lambek）与斯科特（P. Scott）论证了范畴论可以提供其所需的语义学。⑤ 因此，无论在弗雷格还是布尔的逻辑思想中，范畴论都是表述数学的语言。

范畴论中的态射描述结构中对象之间的关系，函子解释不同结构之间的关系，同构表述等价关系的结构。根本上讲，函子是范畴之间保存结构的态射，可见，范畴中的态射既可以表示对象之间的关系，也可以表示范畴之间的关系，而且范畴论的图表能够更加清晰地展示对象与结构间的关系。因此，我们有理由认为范畴论这种数学语言可以诠释数学的内核——结构。

2. 构建数学框架

随着范畴论的不断发展，越来越多的哲学家提倡范畴为结构主义提供了自然的框架。⑥ 范畴论中的概念可以表述数学结构以及结构与结构之间的关系，并且其表述方式是统一的，这使得某些数学概念之间的联系更加一目了然。可以说，范畴论提供了一种极其有用的框架，该框架使得不同的数学概念之间相互关联。范畴论是结构的理论，对数学结构有完整的表达。在这个意义上，我们认为范畴论不仅是数学语言，还构建了数学框架。

数学框架必须能够为数学中的概念及理论提供系统的解释。任意范畴都表示了某种数学结构，而且范畴论对数学结构的阐释方式是统一的。范畴论的阐释抓住了数学结构的共同特征，为数学结构理论搭建了一个统一的概念框架。在对范畴论的探究中，麦克莱恩赋予了范畴论组织者的角色。⑦兰德瑞认为，范畴论作为一种组织的工具，能够谈论抽象类数学系统的共享结构，⑧ 可见，兰德瑞支持麦克莱恩关于范畴论的观点，认为范畴论能够组织数学哲学家们论及的数学概念以及理论的结构。根本上，范畴论可以将数学的概念与关系表示为某一特殊范畴中的对象与箭头，因此提供了组织与分类多种数学模型中不同数学概念之间关系的方式。另外，范畴论能够揭示所有数学分

①④ Cf. John Mayberry, "What is Required of a Foundation for Mathematics?", *Philosophia Mathematica*, 1994, 2 (1), p. 26, p. 26.

②③⑦ Cf. Elaine Landry, "Category Theory: The Language of Mathematics", *Philosophy of Science*, 1999, 66, p. 17, p. 18, p. 14.

⑤ Cf. Joachim Lambek, Philip J. Scott, *Introduction to Higher Order Categorical Logic*, Cambridge University Press, 1989, pp. 1—304.

⑥ Cf. Jessica Carter, "Individuation of Object-A Problem for Structuralism?", *Synthese*, 2005, 143 (3), p. 292.

⑧ Cf. Elaine Landry, "Category Theory as a Framework for an in re Interpretation of Mathematical Structuralism", *The Age of Alternative Logics*, J. van Benthem, G. Heinzmann, M. Rebuschi, et al. (eds.), Springer, 2006, p. 174.

支共同的结构原理，将数学体系化与统一化，因此也发挥了组织的作用。所以说，范畴论不仅是一种数学结构理论，还是一种哲学意义上的组织工具，为数学中的概念及理论提供了解释框架。范畴论通过阐释结构表征数学对象及对象之间的关系，还可以通过函子表示结构与结构之间的关系。兰德瑞对此表示 "范畴论是数学概念与关系的语言，因为它允许我们在不同的解释中谈论概念与关系组成的结构。同样地，我们可以通过一般范畴谈及数学理论与理论之间的关系，因此范畴论是数学理论及其理论之间关系的语言，因为它允许我们依据对象与函子谈论一般理论及其关系组成的一般结构。"① 在这个意义上，兰德瑞认为范畴论是数学语言，而且范畴论应该被看作数学结构主义的框架。② 显然，范畴论语言中对象与箭头的应用能够将数学中的概念、关系、模型等统一化，所以说范畴论为数学提供了理论框架。此外，阿沃第已明确建议，范畴论为实现结构主义提供了自然的框架，并且这种框架是数学哲学应该采用及追求的。③ 自 20 世纪 50 年代起，范畴论已经成为拓扑学、大部分代数、多数泛函分析的标准研究框架。至 60 年代发展至代数几何与数论，随后逐渐推广到所有数学中。④ 确切地讲，范畴论能够阐述有关数学结构的概念内容及理论，并且能够将这些结构统一起来，还可以根据需要提供多样的解释。在这个意义上可以说，范畴论能够为数学提供框架，而且在其框架下，不同数学分支、不同数学领域的关系可以统一起来，使数学分支免于片段化的独立发展。

简言之，我们通过论述表明，范畴论语言以其强大的表述力，既诠释了数学内核，又构建了数学框架。因此，可以依据范畴论全方位地理解数学。此即范畴论数学基础的本质特征。

结 语

数学关注的是结构以及对象具有的结构性质，范畴论可被看作关于数学结构的理论。这样的认识与理解相结合奠定了范畴论数学基础的解释路径。沿着数学到结构再到范畴的思路，我们阐明了范畴论数学基础的理论根基，指明了范畴论作为数学基础的理论依据。值得强调的是，以范畴论为数学基础的研究思想有助于我们以统一的方式重新解读数学，将数学知识体系化、条理化。这既推动了包含范畴论在内的数学学科的进步，又推进了数学结构主义的深入发展。更重要的是，这种基于范畴论的结构主义进路为数学基础提供了新的研究模式，开启了新的研究思路。

（作者单位：山西大学科学技术哲学研究中心）

责任编辑 孙婧一

① Elaine Landry, "Category Theory: The Language of Mathematics", p. 26.

② Cf. Elaine Landry, "Category Theory: The Language of Mathematics", p. 27.

③ Cf. Geoffrey Hellman, "Structuralism", *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, S. Shapiro, W. J. Wainwright (eds.), Oxford University Press, 2005, p. 547.

④ Cf. Colin McLarty, "Learning from Questions on Categorical Foundations", *Philosophia Mathematica*, 2005, 13 (1), p. 44.